

МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНВЕЙЕРНЫХ ЛЕНТ

Рассматривается задача определения неизвестных параметров линейного оператора по собственным значениям. Этот класс задач возникает при конструировании динамических систем с заданными резонансными характеристиками, а также при диагностике колеблющихся систем по значениям собственных колебаний.

Ключевые слова: ленточный конвейер, резонанс.

MODAL ANALYSIS OF TRANSVERSE VIBRATIONS OF CONVEYOR BELTS

The problem of determining the unknown parameters of a linear operator from eigenvalues is considered. This class of problems arises in the design of dynamic systems with specified resonant characteristics, as well as in the diagnosis of oscillating systems according to the values of natural vibrations.

Keywords: belt conveyor, resonance.

Первоочередной задачей проектирования ленточных конвейеров является обеспечение динамической устойчивости. В практике эксплуатации мощных конвейеров наблюдаются интенсивные вибрации ленты с большой амплитудой, что может отрицательно сказаться на долговечности подшипников роlikоопор.

Оценка границ устойчивости производится на основании исследования нелинейно-резонансных режимов [1]. Одним из этапов является определение собственных частот и форм колебаний ленты.

Уравнение поперечных колебаний движущейся конвейерной ленты без учета диссипации энергии и моментов инерционных сил поворота сечений запишем в виде:

$$\frac{D_x g}{q} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{Sg}{q} - v^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (1)$$

где $w(x, t)$ — прогиб ленты, м; $q(x, t)$ — погонная нагрузка на ленту, Н/м; S — натяжение ленты, Н; v — скорость ленты, м/с; D_x — изгибная жесткость ленты в направлении оси x ; x — координата вдоль ленты, м; $g = 9,81$ м/с².

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\frac{D_x g}{q} \lambda^4 - \left(\frac{Sg}{q} - v^2 \right) \lambda^2 = 0. \quad (2)$$

И рассмотрим спектральную задачу, т. е. задачу на собственные формы и собственные значения колебаний.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \lambda_i^4 \varphi_i \quad (0 \leq x \leq l);$$

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = 0 \quad \frac{\partial \varphi_i(0)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_i(l)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Задача (3) разрешима для счетного набора чисел λ_i , каждое из которых является положительным и корнем его уравнения:

$$sh(\lambda_i l) \cos(\lambda_i l) = 1.$$

И определяется как

$$\lambda_1 = \frac{4,73}{l}; \lambda_2 = \frac{7,853}{l}; \lambda_3 = \frac{10,996}{l}; \lambda_4 = \frac{14,137}{l};$$

$$\dots$$

$$\lambda_i = \frac{\pi i}{l} + \frac{\pi}{2l} = \frac{\pi(1+2i)}{2l}.$$

Собственные формы колебаний φ_i представляется в виде [2]:

$$\varphi_i(x) = c_i \left[U(\lambda_i x) - \frac{U(\lambda_i l)}{v(\lambda_i l)} v(\lambda_i x) \right], \quad (0 \leq x \leq l), \quad (4)$$

где $U(\alpha)$, $v(\alpha)$ — функции А. Н. Крылова, определяемые как

$$U(\alpha) = \frac{1}{2}(ch\alpha - \cos\alpha), \quad v(\alpha) = \frac{1}{2}(sh\alpha - \sin\alpha).$$

Константа c_i выбирается из условия нормирования:

$$c_i^2 = \frac{1}{\int_0^l \left[U(\lambda_i x) - \frac{U(\lambda_i l)}{v(\lambda_i l)} v(\lambda_i x) \right]^2 dx} \triangleq \frac{1}{\int_0^l [\psi_i(x)]^2 dx}. \quad (5)$$

Причем из (2)

$$\int_0^l [\psi_i(x)]^2 dx = \frac{l}{4} \frac{[\psi_i''(l)]^2}{\lambda_i^4}, \quad (6)$$

поэтому

$$c_i = \frac{2\lambda_i^2}{\sqrt{l} |\psi_i''(l)|}. \quad (7)$$

Обозначим в (4) $\frac{U(\lambda_i l)}{v(\lambda_i l)} = \gamma_i$ и перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= c_i \psi_i(x) = \\ &= \frac{c_i}{2} \{ ch(\lambda_i x) - \cos(\lambda_i x) - \\ &\quad - \gamma_i [sh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x)] \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя (8), запишем

$$\begin{aligned} \psi_i''(x) &= \frac{\lambda_i^2}{2} \{ ch(\lambda_i x) + \cos(\lambda_i x) - \\ &\quad - \gamma_i [sh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x)] \} \end{aligned} \quad (9)$$

и, подставляя $x = l$, получим для нечетных мод $\psi_i''(l) = \lambda_i^2$ ($i = 1, 3, 5 \dots$) и для четных $\psi_i''(l) = -\lambda_i^2$ ($i = 2, 4, 6 \dots$), а в общем случае $|\psi_i''(l)| = \lambda_i^2$.

Теперь $c_i = \frac{2\lambda_i^2}{\sqrt{l}\lambda_i^2} = \frac{2}{\sqrt{l}}$ и выражение для собственных форм принимает вид:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{l}} \{ ch(\lambda_i x) - \cos(\lambda_i x) - \\ &\quad - \gamma_i [sh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x)] \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Причем $\gamma_1 = 0,9825$; $\gamma_2 = \gamma_3 = 1$ (в дальнейшем ограничимся рассмотрением первых трех мод колебаний).

Первая и вторая производные собственных форм по аргументу будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \varphi_i'(x) &= \frac{\lambda_i}{\sqrt{l}} \{ sh(\lambda_i x) + \sin(\lambda_i x) - \\ &\quad - \gamma_i [sh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x)] \}. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varphi_i''(x) &= \frac{\lambda_i}{\sqrt{l}} \{ ch(\lambda_i x) + \cos(\lambda_i x) - \\ &\quad - \gamma_i [sh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x)] \}. \end{aligned} \quad (12)$$

Вид собственных форм первых трех мод поперечных колебаний нижней ветви ленты и их производных приведен на рис. 1 для длины пролета $l = 3$ м на первой и третьей модах максимальные амплитуды соответствуют середине пролета, а их значения соответственно равны $\varphi_1(l/2) = 2/\sqrt{l}$ и $\varphi_3(l/2) = -1,37/\sqrt{l}$ [3].

Положение максимума значения второй модальной формы определяется из условия $\varphi_2'(\bar{x}l) = 0$. С использованием (11) имеем

$$sh\alpha - ch\alpha + \sin\alpha + \cos\alpha = 0, \quad (13)$$

где $a = 7,853\bar{x}$. Решением трансцендентного уравнения (13) является $\bar{x} \approx 0,29$, т.е. $x \approx 0,29l$. Амплитудное значение второй модальной формы $\varphi_2(0,29l) = 1,5/\sqrt{l}$.

Графические зависимости амплитудных значений собственных форм трех первых мод колебаний от длины пролета ленты приведены на рис. 2.

На рис. 3 показаны шесть модальных форм собственных колебаний пролета нижней ветви конвейера (ширина ленты $B = 1,2$ м, длина пролета $l = 3,0$ м). Рассмотрены особенности модальных

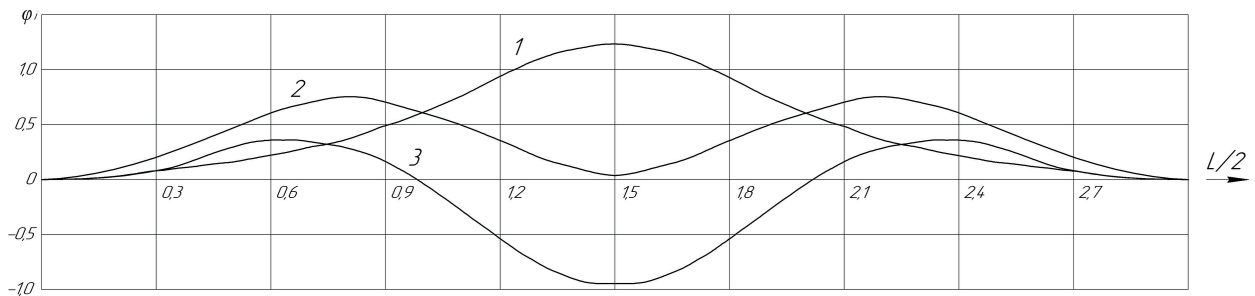


Рис. 1. Собственные формы первых трех мод поперечных колебаний

форм для ленты, имеющей желобчатую форму поперечного сечения. Радиус кривизны $R = 2B$, что соответствует опиранию нижней ветви ленты на двухроликовые опоры с углами наклона боковых роликов $\beta = 11^\circ$.

Степень точности определения координат перемещения ленты при использовании данной формулы увеличивается по мере приближения к резонансной частоте профиля гармоники $\varphi_i(x)$ [4].

Исследования модальных форм собственных частот колебаний позволяет исключить при определенных конструктивных параметрах и эксплуатационных режимах конвейеров возникновение резонансных и околорезонансных режимов работы.

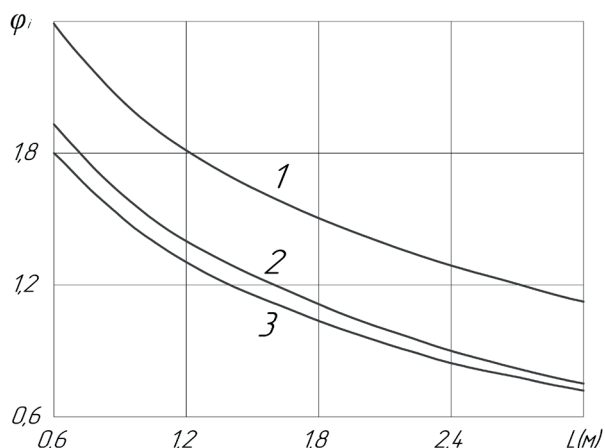


Рис. 2. Зависимость амплитудных значений трех первых модальных форм от длины пролета:
1 — $\varphi_1(l/2)$; 2 — $\varphi_2(0,29l)$; 3 — $\varphi_3(l/2)$

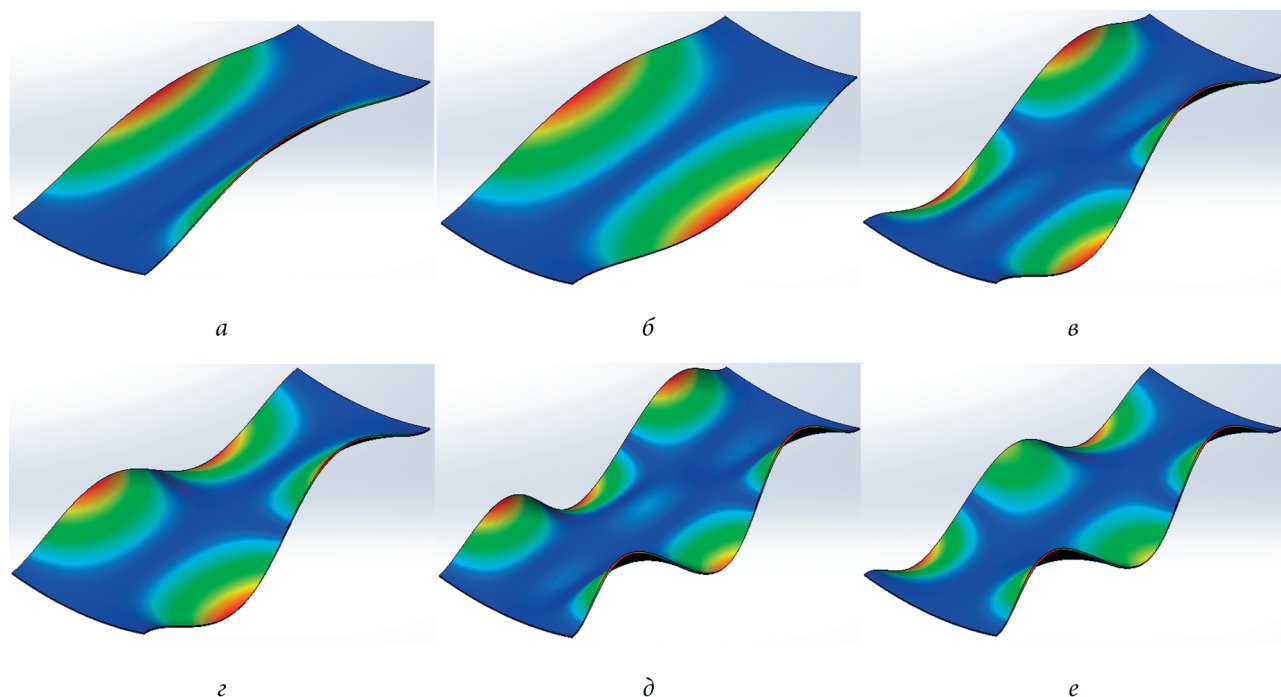


Рис. 3. Формы обственных колебаний пролета нижней части конвейера:
а — I мода, симметричная; б — I мода, кососимметричная; в — II мода, симметричная; г — II мода, кососимметричная; д — III мода, симметричная; е — III мода, кососимметричная

Список литературы

1. Harrison A. Modern design of belt conveyors in the context of stability boundaries and chaos / A. Harrison. — London : Royal Society, 16 March 1992. — P. 491–502.
2. Панкратов С. А. Динамика машин для открытых горных и земляных работ / С. А. Панкратов. — Москва : Машиностроение, 1967. — 446 с.
3. Кожушко Г. Г. Анализ вынужденных поперечных колебаний конвейерных лент / Г. Г. Кожушко, М. Д. Лукашук // Технологическое оборудование для горной и нефтегазовой промышленности : сб. трудов XVII Междунар. науч.-техн. конф. «Чтения памяти В. Р. Кубачека», 4–5 апр., 2019 г., г. Екатеринбург. — Екатеринбург : УГТУ, 2019. — С. 469–472.
4. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. — Москва : ГИТЛ, 2004. — 628 с. — ISBN 5-7107-7397-2.